3) on pose : $\varphi(x)=f^{-1}(x)+f^{-1}(-x)$

- f est continue sur $[0,1]$

d'où f^{-1} est continue sur $[-1,1]$

par suite φ est continue sur $[-1,1]$

- f est dérivable sur $]0,1[$

et $f'(x)=-\pi\sin(\pi x)\neq 0$; $\forall x\in]0,1[$

d'où f^{-1} est dérivable sur $f(]0,1[)=]-1,1[$

φ est dérivable sur $]-1,1[$

calculons $(f^{-1})'(x)$ pour $x\in]-1,1[$

$$(f^{-1})'(x)=\frac{1}{f'(f^{-1}(x))}=\frac{1}{f'(y)} \quad \text{avec } y=f^{-1}(x), f(y)=x$$

$$=\frac{-1}{\pi\sin(\pi y)}=\frac{-1}{\pi\sqrt{1-\cos^2(\pi y)}} \quad \text{car } \sin \pi y \geq 0$$

$$=\frac{-1}{\pi\sqrt{1-f^2(y)}}$$

$$(f^{-1})'(x)=\frac{-1}{\pi\sqrt{1-x^2}}$$

$$\varphi'(x)=(f^{-1})'(x)-(f^{-1})'(-x)$$

$$=\frac{-1}{\pi\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{\pi\sqrt{1-(-x)^2}}=0$$

$\varphi(x)=f^{-1}(x)+f^{-1}(-x)$

$\varphi'(x)=0$; $\forall x\in]-1,1[$

d'où φ est constante sur $[-1,1]$

$f(0)=1 \rightarrow f^{-1}(1)=0$

$f(1)=-1 \rightarrow f^{-1}(-1)=1$

$\varphi(1)=f^{-1}(1)+f^{-1}(-1)$

$\varphi(1)=1$

d'où $\varphi(x)=1$; $\forall x\in[-1,1]$

$\Rightarrow f^{-1}(x)+f^{-1}(-x)=1 \quad \forall x\in[-1,1]$

<u>interprétation graphique :</u>

$f^{-1}(x)+f^{-1}(-x)=1$

$\Rightarrow f^{-1}(-x)=1-f^{-1}(x)$

$\Rightarrow f^{-1}(2\times 0-x)=2\times\frac{1}{2}-f^{-1}(x)$

A(0,½) est un centre de symétrie pour $(\zeta_{f^{-1}})$

EX 5 :

$f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{4+x}$; $D_f=\mathbb{R}_+$

1) $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}}{x}+\frac{(4+x)-4}{x\left[\sqrt{4+x}+2\right]}$

$=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{4+x}+2}=+\infty$

f n'est pas dérivable à droite en 0

2) a) f est dérivable sur $]0,+\infty[$

$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2\sqrt{4+x}}>0$

f est continue et strictement croissante sur $[0,$

elle réalise une bijection de $[0,+\infty[$ sur $J=f([0,$

$J=[2,+\infty[$

* f est dérivable sur $]0,+\infty[$

et $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2\sqrt{4+x}}\neq 0$

d'où f^{-1} est dérivable sur $f(]0,+\infty[)=]2,+\infty[$

* $\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{f^{-1}(x)-f^{-1}(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{f^{-1}(x)}{x-2}$

(on pose $y=f^{-1}(x), x=f(y)$; $x\to 2^+, y\to 0^+$)

$=\lim\limits_{y\to 0^+}\frac{y}{f(y)-2}=\lim\limits_{y\to 0^+}\frac{1}{\frac{f(y)-f(0)}{y}}=0$

d'où f^{-1} est dérivable à droite en 2 et $(f^{-1})'_d(2)=$

(Rq: on pourra résoudre le probléme graphiquem

conclusion : f^{-1} est dérivable sur $J=[2,+\infty[$

b) $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2\sqrt{4+x}}>0$

x	0		+∞
f'(x)	|	+	
f(x)		↗	+∞
	2		

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{4+x}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt{\frac{4}{x^2}+\frac{1}{x}}=0$

(ζ_f) admet une branche parabolique de direction (O,i)

Oarray.tn -Aqra Blech- Oarray.tn